Решения задач варианта 10

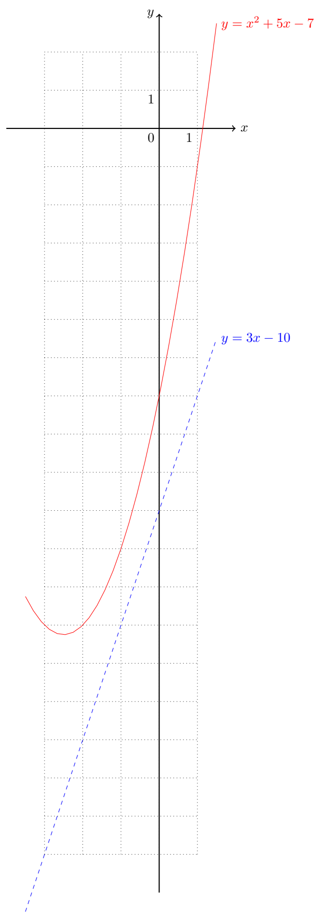
Сафронов М. А.

11 февраля 2014 г.

1 Задание B8

1.1 Задание

Прямая $y = 3x - 10$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 5x - 7$. Найдите абсциссу точки касания.



1.2 Решение

Если прямые параллельны, то они имеют один и тот же угол наклона.

Если прямая описана уравнением $y = ax + b$, то коэффициент a влияет на угол наклона.

Угол наклона касательной к графику функции равен значению производной этой функции в точке касания

В уравнении $y = 3x - 10$ угловой коэффициент равен 3.

Так как дано, что касательная параллельна некоей прямой с угловым коэффициентом 3, значит, значение производной должно быть 3.

Производная данной функции:

$$y = x^2 + 5x - 7 \tag{1}$$
$$y' = (x^2 + 5x - 7)' \tag{2}$$
$$y' = 2x + 5 \tag{3}$$

Как мы уже определили, y' должно быть равно 3.
Найдём x:

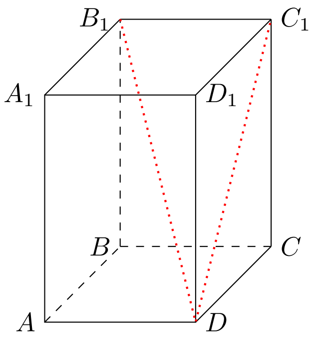
$$2x + 5 = 3 \tag{4}$$
$$x + 2.5 = 1.5 \tag{5}$$
$$x = 1.5 - 2.5 \tag{6}$$
$$x = -1 \tag{7}$$

«Абсцисса точки» это просто значение её координаты x.
Таким образом, решением данной задачи является число **-1**.

2 Задание B9

2.1 Задание

Найдите угол B_1DC_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 12, C_1C = 16, AD = 20$ (см. рис.). Ответ дайте в градусах.

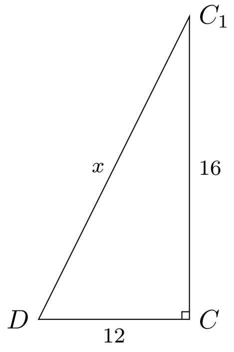


2.2 Решение

Так как наша фигура — параллелепипед, то мы имеем очень много полезных свойств.

Раз $AB = 12$, то CD тоже равно 12.

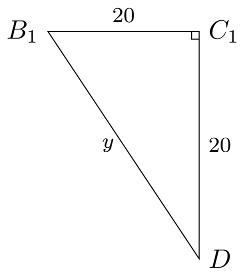
Рассмотрим $\triangle C_1CD$:



Найдём длину стороны C_1D по теореме Пифагора:

$$x^2 = 12^2 + 16^2 \tag{8}$$
$$x = \sqrt{144 + 256} \tag{9}$$
$$x = 20 \tag{10}$$

Длина B_1C_1 равна длине AD, которая известна и равна 20. Рассмотрим $\triangle B_1DC_1$:



Как мы видим, это равнобедренный прямоугольный треугольник. Мы могли бы найти величину искомого угла при помощи определения косинуса, но известно, что углы при основании равнобедренного треугольника равны, поэтому $\angle B_1DC_1 = \angle C_1B_1D$. Нам известно, что $\angle B_1C_1D = 90°$.

Отсюда, так как сумма углов в треугольнике должна быть равна $180°$:

$$\angle C_1B_1D + \angle B_1DC_1 + \angle B_1C_1D = 180 \tag{11}$$
$$x + x + 90 = 180 \tag{12}$$
$$2x = 180 - 90 \tag{13}$$
$$x = 90/2 \tag{14}$$
$$x = 45 \tag{15}$$
$$\tag{16}$$

Ответ: $\angle B_1DC_1 = 45°$.

3 Задание B11

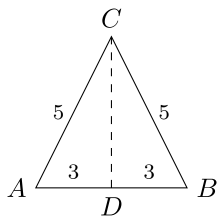
3.1 Задание

Боковые рёбра правильной четырёхугольной пирамиды равны 5, сторона основания равна 6. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.

3.2 Решение

Так как пирамида правильная, все треугольники в ней равнобедренные, а в основании квадрат. Поверхность складывается из площадей четырёх равных треугольников и квадрата.

Таким образом, задача сводится к задаче нахождения площади равнобедренного треугольника по трём его сторонам. Рассмотрим треугольник на стороне пирамиды:



Площадь этого треугольника вычисляется по формуле:

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot CD \tag{17}$$

Найдём CD по теореме Пифагора:

$$CD^2 = CB^2 - DB^2 \tag{18}$$
$$CD = \sqrt{5^2 - 3^2} \tag{19}$$
$$CD = \sqrt{25 - 9} \tag{20}$$
$$CD = 4 \tag{21}$$

Таким образом, площадь стороны искомой пирамиды равна $1/2 \cdot 4 \cdot 6 = 12$.

Площадь квадрата в основании, очевидно, равна $4 \cdot 6 = 24$.

Таким образом, площадь поверхности этой пирамиды равна $24 + 12 \cdot 4 = 24 + 48 = 72$.

4 Задание B12

Пропустите это задание.

5 Задание B13

5.1 Задание

Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 60 км, выехал с постоянной скоростью велосипедист, а через полчаса после него со скоростью на 10 км/ч больше выехал второй велосипедист. Найдите скорость первого велосипедиста, если в пункт B он прибыл на 30 минут позже второго. Ответ дайте в км/ч.

5.2 Решение

Дано:

$$S = 60 \tag{22}$$
$$v_2 = v_1 + 10 \tag{23}$$

Первый велосипедист выехал на 30 минут раньше и приехал на 30 минут позже, то есть, в сумме он ехал на 1 час дольше, откуда:

$$t_2 = t_1 - 1 \tag{24}$$

Мы знаем, что скорость выражается через расстояние и время следующим образом:

$$v = \frac{S}{t} \tag{25}$$

Откуда:

$$S = vt \tag{26}$$

Так как оба велосипедиста проехали одинаковое расстояние, получаем следующее уравнение:

$$v_1 t_1 = v_2 t_2 \tag{27}$$
$$v_1 t_1 = (v_1 + 10)(t_1 - 1) \tag{28}$$

Выразим, например, t_1 через v_1:

$$v_1 t_1 = 60 \tag{29}$$
$$t_1 = 60/v_1 \tag{30}$$

Мы знаем, что $v_1 \neq 0$, так как очевидно, велосипедист ехал с ненулевой скоростью, поэтому деление на v_1 правомерно. Подставим полученное выражение t_1 в (28):

$$v_1 \frac{60}{v_1} = (v_1 + 10)(\frac{60}{v_1} - 1) \tag{31}$$
$$60 = \frac{60v_1}{v_1} + \frac{60 \cdot 10}{v_1} - v_1 - 10 \tag{32}$$
$$60 + 10 = 60 + \frac{600}{v_1} - v_1 \tag{33}$$
$$10 = \frac{600}{v_1} - v_1 \tag{34}$$
$$10 + v_1 - \frac{600}{v_1} = 0 \tag{35}$$
$$v_1^2 + 10v_1 - 600 = 0 \tag{36}$$

Решим полученное квадратное уравнение формулой «в лоб»:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$a = 1$$
$$b = 10$$
$$c = -600$$
$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 4 \cdot 600}}{2}$$
$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{2500}}{2}$$
$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm 50}{2}$$
$$x_1 = \frac{40}{2} = 20$$
$$x_2 = \frac{-60}{2} = -30$$

Отрицательная скорость для наших нужд не годится, поэтому заключаем, что **первый велосипедист ехал со скоростью 20 км/ч.**

Проверяем:

$$t_1 = \frac{60\text{км}}{20\text{км/ч}} \tag{37}$$
$$t_1 = 3\text{ч} \tag{38}$$
$$v_2 = v_1 + 10\text{км/ч} \tag{39}$$
$$v_2 = 30\text{км/ч} \tag{40}$$
$$t_2 = \frac{60\text{км}}{30\text{км/ч}} \tag{41}$$
$$t_2 = 2\text{ч} \tag{42}$$
$$t_2 \equiv 3\text{ч} - 1\text{ч} \equiv t_1 - 1\text{ч} \tag{43}$$

Верно.

6 Задание B14

6.1 Задание

Найдите наименьшее значение функции $y = 2\sin x - 8x + 3$ на отрезке $[-\frac{\pi}{2}; 0]$.

6.2 Решение

На любом отрезке своей области определения непрерывная функция может иметь наименьшее значение в одной из трёх точек:

1. Левый край отрезка
2. Локальный минимум функции в пределах отрезка
3. Правый край отрезка

Локальный минимум функции это точка, удовлетворяющая трём условиям:

1. Слева от этой точки производная отрицательная, то есть, функция убывает
2. В этой точке производная равна нулю, то есть, функция меняет направление с убывающего на возрастающее
3. Справа от этой точки производная положительна, то есть, функция возрастает

Найдём производную этой функции:

$$y' = (2\sin x - 8x + 3)' \tag{44}$$
$$y' = (2\sin x)' - (8x)' + (3)' \tag{45}$$
$$y' = 2(\sin x)' - 8(x)' + 0 \tag{46}$$
$$y' = 2\cos x - 8 \tag{47}$$

Найдём ноль полученной производной:

$$
\begin{aligned}
2\cos x - 8 &= 0 \qquad (48)\\
\cos x - 4 &= 0 \qquad (49)\\
\cos x &= 4 \qquad (50)
\end{aligned}
$$

Так как косинус на поле действительных чисел не может иметь значения больше 1, значит, решений у этого уравнения нет, откуда заключаем, что у производной данной функции нет нуля, то есть, она имеет постоянный знак, а значит, исходная функция монотонна.

Найдём знак производной, подставив какое-нибудь значение x из рассматриваемого интервала:

$$
\begin{aligned}
&2\cos x - 8 = \{x = -\frac{\pi}{4}\} = &(51)\\
&2\cos -\frac{\pi}{4} - 8 = &(52)\\
&= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 8 = &(53)\\
&= \sqrt{2} - 8 &(54)\\
&< 0 &(55)\\
& &(56)
\end{aligned}
$$

То есть, производная отрицательна на рассматриваемом отрезке, а значит, исходная функция постоянно убывает. Отсюда делаем вывод, что минимальное значение на рассматриваемом отрезке исходная функция принимает на правом крае отрезка, в точке $x = 0$.

Найдём это значение:

$$
\begin{aligned}
&2\sin x - 8x + 3 = \{x = 0\} = &(57)\\
&= 2\sin 0 - 8 \cdot 0 + 3 = &(58)\\
&= 3 &(59)
\end{aligned}
$$

Наименьшее значение функции $y = 2\sin x - 8x + 3$ **на отрезке** $[-\frac{\pi}{2}; 0]$ **равно 3 в точке** $x = 0$.

Проверяем:

$$
\begin{aligned}
&2\sin x - 8x + 3 = \{x = -\frac{\pi}{2}\} = &(60)\\
&= 2\sin -\frac{\pi}{2} - 8 \cdot -\frac{\pi}{2} + 3 = &(61)\\
&= 2 \cdot (-1) + \frac{8\pi}{2} + 3 &(62)\\
&> 3 &(63)
\end{aligned}
$$

Верно. На левом крае рассматриваемого отрезка значение функции больше, чем на правом.